数理解析研究所講究録
第 868 巻 1994 年 216-222

非線型可積分系の確率モデルと Karmarkar アルゴリズムの力学系

伊藤栄明（統計数理研究所、総合研究大学院大学）

Yoshiaki Itoh

The Institute of Statistical Mathematics, and the Graduate University for Advanced Studies, 4-6-7 Minami-Azabu, Minato-ku, Tokyo 106

1. 巡回生存競争系の２体衝突モデル

巡回的な強弱関係をもち m 個の種（型）からなる生存競争系（ Lotka-Volterra 系）、

$$\frac{dP_i}{dt} = P_i(\sum_{j=1}^{s} P_{i-j} - \sum_{j=1}^{s} P_{i+j}) \tag{1}$$

$,i = 1, 2, ..., m,$ を考える。いま、係数 a_{ij} を次の式によりさだめる。

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}P_j \equiv \sum_{j=1}^{s} P_{i-j} - \sum_{j=1}^{s} P_{i+j} \tag{2}$$

すなわち $a_{ij} = 1$ のとき型 i は型 j より強く $(j \prec i)$ 、 $a_{ij} = -1$ のとき型 i は型 j $(i \prec j)$ より弱いということにする. $i_j - i_k \equiv 1, 2, ..., q(\ mod\ m),$ のとき $i_k \prec i_j$であり、 $i_j - i_k \equiv q+1, q+2, ..., m-q-1(\ mod\ m)$ のとき i_j と i_k のあいだに強弱関係はなく互いに中立であるということにする $(i_j \sim i_k)$ 。. m 個の型のいずれかからなる l 個の型を考える。各々が q 個の型より強く、q 個の型より弱い という l個の型の組をすべて考え、それを $R_l(q)$ とする。すなわち $R_l(q) = \{(i_1, i_2, ..., i_l) \mid i_k \prec i_j\ for\ i_j - i_k \equiv 1, 2, ..., q(\ mod\ m), i_j \sim i_k\ for\ i_j - i_k \equiv q+1, q+2, ..., m-q-1(\ mod\ m), i_1, i_2, ..., i_l \in \{1, 2, ..., m\}, i_1 \prec i_2 \prec, ..., \prec i_l, i_1 \leq i_2, ..., i_l\}$ とする。そのとき

$$I_{l,q} = \sum_{(i_1,i_2,...,i_l)\in R_l(q)} P_{i_1}P_{i_2}...P_{i_l} \tag{3}$$

は (1) 式の保存量であり、この系は非線形可積分系である (Itoh(1977, 1979, 1987, 1994), Bogoyavkensky(1988, 1991)) 。この系について離散 Lotla-Volterra

系という視点からの接近法がある（広田、辻本 (1994)）。巡回的でない場合であるが行列の固有値をもとめるアルゴリズムとの関連がある（薩摩、永井 (1993)）。$s=1$ の場合には戸田方程式との関連で議論されている（ Hirota and Satsuma (1976)）。

例。$m=2s+1$ のとき, $I_{2r+1,r}$（ $r=0,1,...,s$ ）は保存量である。

$s=1$ のとき, $I_{m,1}$ および $I_{l,0}$（ $l=1,2,...,[m/2]$ ）は保存量である。

$m=6$ 、 $s=2$ のとき

$I_{1,0}=P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6,$

$I_{2,0}=P_1P_4+P_2P_5+P_3P_6,$

$I_{3,1}=P_1P_3P_5+P_2P_4P_6,$

$I_{4,1}=P_1P_2P_4P_5+P_1P_3P_4P_6+P_2P_3P_5P_6,$

$I_{6,2}=P_1P_2P_3P_4P_5P_6.$

は保存量である。

Bogoyavlensky (1988) が Lax 形式より導いた保存量 J_k, との関連を考える。

$$J_{k+1}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s_1,s_2,...,s_k}C(s_1,s_2,...,s_k)\prod_{l=0}^{k}P_{i-lr+s_1+...+s_l} \tag{4}$$

ここで $s_i>0$, $s_0=0$, $C(s_1,s_2,...,s_k)=(k+1)s+1-s_1-...-s_k$, $s_1+...+s_k\le(k+1)s$ とする。

$m=2s+1$ のとき, $I_{2r+1,r}$（ $r=0,1,...,s$ ）を $s=2$ のときに考える。この場合

$J_1=I_{1,0}, J_2=2I_{1,0}^2, J_3=3I_{1,0}^3+9I_{3,1},$

$J_4=3I_{1,0}^4+24I_{1,0}I_{3,1},$

$J_5=3I_{1,.0}^5+45I_{3,1}I_0+15I_{5,2}.$

となる。

上の式 (1) は次の i) 、ii) 、iii) による確率モデルより n を無限大としてえられる。

i) m 個のタイプ $1,2,...,m$ のそれぞれの粒子数は時刻 t においてそれぞれ $X_1(t),X_2(t),...,X_m(t)$ とする。粒子の総数を n とする。

ii) Δt 時間にランダムに選ばれた2粒子の間の衝突が1回起きる。衝突する2粒子の組は${}_nC_2$個のなかから等確率で選ばれる。

iii) タイプ i の1粒子とタイプ j の1粒子の衝突により, 2粒子は確率 $(1+a_{ij})/2$ で i の2粒子になり確率 $(1+a_{ji})/2$ で j の2粒子になる。ここ

で $a_{ij}+a_{ji}=0$ である。

これを記述するマルコフ連鎖を考える。時刻 t における各型の粒子数を $\vec{X}(t)=(X_1(t),X_2(t),\cdots,X_m(t))$ とする。各時点に於ける遷移確率を

$P_r[\vec{X}(t+\Delta t)=\vec{n}_{ij}\mid\vec{X}(t)=\vec{n}]=\frac{(1+a_{ij})n_in_j}{n(n-1)}$,

$P_r[\vec{X}(t+\Delta t)=\vec{n}\mid\vec{X}(t)=\vec{n}]=\sum_{i=1}^{m}\frac{n_i(n_i-1)}{n(n-1)}$

であたえる。ここで

$\vec{n}_{ij}=(n_1,\cdots,n_i+1,\cdots,n_j-1,\cdots,n_m)$, $\vec{n}=(n_1,n_2,\cdots,n_m)$

とする。

a_{ij}を式 (2) により定める。$X_i(t)/n=P_i$とおくと $I_{l,q}$について次の条件付期待値が得られる (Itoh(1973, 1979, 1994)) 。

$$E(I_{l,q}(t+k\Delta t)\mid I_{l,q}(t))=(1-\frac{2_lC_2}{n(n-1)})^kI_{l,q}(t) \tag{5}$$

これが上記の保存量に対応する関係である。この確率モデルは上記巡回生存競争系の差分系と考えることもできる。いわば確率差分系であり、保存量に対応する自然な量をもつのである。このような条件付き期待値の関係は上記の $J_1,J_2,\ldots$ については存在しない。

$b_{ij}(t)(i>j)$ は互いに独立な標準 Brown 運動とし、$b_{ij}(t)+b_{ji}(t)=0$ とする。$i=1,2,\cdot,m,$ について、

$$dP_i(t)=P_i(t)(\sum_{k=0}^{s}P_{i-k}(t)-\sum_{k=0}^{s}P_{i+k}(t))dt+\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\frac{1}{n}P_i(t)P_j(t)}db_{ij}(t) \tag{6}$$

は上記確率モデルを確率微分方程式によりあらわしたものであり、伊藤の公式をもちいて (5) 式と同様な式がえられる (Itoh(1993, 1994)) 。この確率微分方程式は揺動散逸定理という視点からも自然なものである (0kabe, Mano, Itoh (1994)) 。

2.　4体衝突モデルと Karmakar アルゴリズムの力学系

集団遺伝学においては適応度という量をもちいて自然淘汰の効果が記述される。Fisher(1930) の自然淘汰の方程式は これに基づいている。各遺伝子型の適応度をあらわすのにその遺伝子型に属する任意の一個体が残す子供の平均数をもってする。ヘテロ接合体の適応度がホモ接合体の適応度より、ある一定量だけ高いと仮定したモデルは超優性モデルといわれ集団遺伝学で重要なも

ののひとつである(丸山毅夫(1981))。超優性モデルによる系の遺伝子頻度を記述する方程式は、集団遺伝学に於て議論されてきたが、適応度という量にもとづいたモデル化を行っている。2倍体生物を考える場合それぞれ2粒子からなる2組の間のランダムな出会いにもとづいた4体衝突モデルにもとづいて、超優性モデルを議論することができる(Itoh(1984))。4体衝突モデルより Fisher の方程式を導こう。m 個のタイプ, $A_1, A_2, \cdots, A_m$ の粒子が n 個ある。4粒子の出会いによるモデルを考える。4粒子は系からランダムに選ばれるものとする。その4粒子は タイプ A_i, A_j, A_k, および A_l. であったとする。A_i の1粒子と A_j の1粒子は 結合して2粒子の組 A_iA_j となり、A_k の1粒子と A_l の1粒子は結合して2粒子の組 A_kA_l となるとする. A_iA_j と A_kA_l が出会うことにより、確率 $1/2+s_{ij,kl}$ で2個の A_iA_j となり確率 $1/2+s_{kl,ij}$ で2個の A_kA_l となるものとする。ここで $s_{ij,kl}=-s_{kl,ij}$ とする. 2個の A_iA_j ができた場合、分裂して2個の A_i および2個の A_j となる。2個の A_kA_l ができた場合も、分裂して2個の A_k および2個の A_l となる。この過程が次々にくりかえされて行くというモデルを考える。各粒子は4粒子の出会いに時間 $[t, t+\Delta t]$ の間に 平均的に Δt 回参加するものとする。時刻 t における m 個のタイプ, $A_1, A_2, \cdots, A_m$ それぞれの粒子数を $\vec{X}=(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ とし、時刻 t における変化の期待値 $E(\Delta X_i(t))$ および分散共分散 $E(\Delta X_i(t)\Delta X_j(t))$ をもとめると Fisher(1930) の自然淘汰の基本方程式がえられる。すなわち $i, j, k, l=1,2,\ldots,m,$ について $s_{ij,kl}=a_{ij}-a_{kl}, a_{ij}=a_{ji}$、とし n を無限大とおけば

$$\frac{dP_i(t)}{dt}=P_i\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}P_j-\sum_{k,j=1}^{m}a_{k,j}P_kP_j\right) \tag{7}$$

が得られる。粒子数 n が有限のとき確率微分方程式

$$dP_i(t)=P_i\left(\sum_{j=1}^{m}a_{ij}P_j-\sum_{k,j=1}^{m}a_{k,j}P_kP_j\right)+\sum_{j=1}^{m}\sqrt{\frac{1}{n}P_i(t)P_j(t)}db_{ij}(t), \tag{8}$$

は4体衝突モデルを表す(伊藤(1993)、江口(1993))。これらについての Lax 形式が議論されている(Nakamura(1992,1994))。4体衝突モデルは自然なものであるが式(7),(8)をもとめるには、すべての場合を数えつくすという組合せ論的な計算を行なう必要があり、簡単ではない。次にモデルをすこし修正すれば、ごく自然な方法で方程式が得られることを示す。

n 個の粒子は m 個のタイプ $1, 2, \cdots, m$, からなり、それぞれの粒子数は, $X_1(t)$, $X_2(t), \cdots, X_m(t)$ であるとする。4粒子の出会いによるモデルを考える。4粒子は系からランダムに選ばれるものとする。その4粒子は タイプ

A_i, A_j, A_k, および A_l. であったとする。A_i の 1 粒子と A_jの 1 粒子は 結合して 2 粒子の組 A_iA_jとなり、A_k の 1 粒子と A_l の 1 粒子は結合して 2 粒子の組 A_kA_lとなるとする. A_iA_j と A_kA_l が出会うことにより、確率 $1/2 + s_{ij,kl}$ で A_iA_jと A_kA_lとなり確率 $1/2 + s_{kl,ij}$ で A_kA_j と A_kA_lとなるものとする。ここで $s_{ij,kl} = -s_{kl,ij}$とする. A_iA_j と A_iA_lができた場合、分裂して 2 個の A_i および 1 個の A_jと 1 個の A_lとなる。A_kA_j と A_kA_lができた場合、分裂して 2 個の A_k および 1 個の A_jと 1 個の A_lとなる。この過程が次々にくりかえされて行くというモデルを考える。各粒子は 4 粒子の出会いに時間 $[t, t+\Delta t]$ の間に 平均的にΔt 回参加するものとする。時刻 t における m 個のタイプ, $A_1, A_2, \cdots, A_m$ それぞれの粒子数を$\vec{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ とし、各粒子は 4 粒子の出会いに時間 $[t, t+\Delta t]$ の間に 平均的にΔt 回参加するものとする。互いに独立な m^4 個の Poisson 分布に従う確率変数 $N_{ij,kl}(c_{ij,kl})$ 、$i, j = 1, 2, ..., m$ 、を時刻 t において考える。ここで $c_{ij,kl}$は Poisson 分布のパラメーターとする。A_iA_j と A_kA_l の衝突により、i の粒子数は Poisson 分布 $Pr(N_{ij,kl}(c_{ij,kl}) = k) = \frac{c_{ij,kl}^k}{k!}e^{-c_{ij,kl}}$に従う確率変数 $N_{ij,kl}(c_{ij,kl})$ だけ増加し $N_{kl,ij}(c_{kl,ij})$ だけ減少する。ここで $c_{ij,kl} = (1/2 + s_{ij,kl})X_i(t)\frac{X_j(t)}{n}\frac{X_k(t)}{n}\frac{X_l(t)}{n}\Delta t$ である。従って X_iの変化は$\sum_{j,k,l=1}^m(N_{ij,kl}(c_{ij,kl}) - N_{kl,ij}(c_{kl,ij}))$ となり $\sum_{j,k,l=1}^m(2(1/n)s_{ij,kl}X_i(t)\frac{X_j(t)}{n}\frac{X_k(t)}{n}\frac{X_l(t)}{n}\Delta t + \sqrt{(1/n)X_i(t)\frac{X_j(t)}{n}\frac{X_k(t)}{n}\frac{X_l(t)}{n}}\Delta b_{ij,kl}(t))$ $i, j = 1, 2, ..., m,$ と同じ平均値および分散共分散をもつ。ここで $i, j, k, l = 1, 2, ..., m,$ について $s_{ij,kl} + s_{kl,ij} = 0$, $s_{ij,kl} = 1/2(a_{ij} - a_{kl}), a_{ij} = a_{ji}$、及び $b_{ij,kl}(t) + b_{kl,ij}(t) = 0$ 、である。各 $b_{ij,kl}(t)$ は $b_{kl,ij}(t)$ 以外の他の $b_{ij,kl}(t)$ ($i, j, k, l = 1, 2, ..., m$) とはすべて独立である Wiener 過程であり、平均 0 および 分散 t である。$P_i = X_i/n$ 、$i = 1, 2, ..., m$ 、とおくと

$$\Delta P_i(t) = \sum_{j,k,l=1}^{m} [2s_{ij,kl}P_iP_jP_kP_l\Delta t \quad + \sqrt{(1/n)P_i(t)P_j(t)P_kP_l}\Delta b_{ij,kl}(t)], \tag{9}$$

が得られる。

$$\sum_{j,k,l=1}^{m} \sqrt{P_i(t)P_j(t)P_kP_l}\Delta b_{ij,kl}(t) = \sum_{k=1}^{m} \sqrt{P_i(t)P_k(t)}(\sum_{j,l=1}^{m} \sqrt{P_j(t)P_l(t)}\Delta b_{ij,kl}(t)) \tag{10}$$

となり、

$$\sum_{j,l=1}^{m} \sqrt{P_j(t)P_l(t)}\Delta b_{ij,kl}(t) \equiv \Delta b_{ik}(t) \tag{11}$$

とおくと $E(\Delta b_{ik}(t)) = 0$, $Var(\Delta b_{ik}(t) = \Delta t$ となる。$\Delta b_{ik}(t)$, $(i > k)$ は互い

に独立となり

$$dP_i(t) = P_i(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}P_j - \sum_{k,j=1}^{m} a_{k,j}P_kP_j)dt + \sum_{j=1}^{m}\sqrt{\frac{1}{n}P_i(t)P_j(t)}db_{ij}(t), \qquad (12)$$

を得る。n が無限大の場合、線形計画法問題の内点法 (Karmarkar(1984)) のアルゴリズムを無限小化してえられる力学系として考えた方程式 (Karmarkar(1990)),

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = P_i(-c_iP_i + \sum_{k=1}^{m} c_kP_k^2) \qquad (13)$$

を特別な場合としてもつ (Nakamura(1994)) 。

Poisson 分布についてのうえの議論より m^4 個の互いに独立な Poisson 過程の時間変更を用いた表現に導かれる (Itoh(1981b)) 。

$$dP_i(t) = \sum_{j=1}^{m}(\frac{1}{n}dN_{ij,kl}(cn(\frac{1}{2}+s_{ij,kl})\int_0^t P_i(t)P_j(t)P_k(t)P_l(t)dt)$$

$$-\frac{1}{n}dN_{kl,ij}(cn(\frac{1}{2}+s_{kl,ij})\int_0^t P_i(t)P_j(t)P_k(t)P_l(t)dt)). \qquad (14)$$

この表現は上記のモデルを方程式として見やすくするものである。

2体衝突モデル、3体衝突モデル、4体衝突モデルを Lax 形式により統一的に表現することができる (Nakamura(1994)).

References

Bogoyavlensky, O.I. (1988). Integrable Discretizations of the KdV Equation. Phys.Lett.A 134, 34-38.

Bogoyavlenskiĭ, O.I.(1989). Algebraic Constructions of Certain Integrable Equations. Math.USSR Izv.33, 39-65.

Bogoyavlenskiĭ, O.I.(1991). A Theorem on Two Commuting Automorphisms, and Integrable Differential Equations, Math.USSR Izv.36, 263-279.

江口真透 (1993). 相対エントロピーと数理進化、数理科学、366,31-35.

Fisher, R.A.(1930) The Genetical Theory of Natural Selection, Oxford, The Clarendon Press.

Hirota, R. and Satsuma, J.(1976). A variety of nonlinear network equation generated from the Backlund transformation for the Toda lattice, Prog. Theor. Phys. Suppl., 59, 64-100.

広田良吾・辻本諭 (1994). Discrete Lotka-Volterra Eq. の保存量（本研究会講演）.

Itoh, Y.(1973). On a ruin problem with interaction, Ann. Inst. Statist. Math. 25, 635-641.

伊藤 栄明 (1977). 種競合のモデルとその性質, Seminar on Probability, 44, 141-146.

Itoh, Y.(1979). Random collision models in oriented graphs, J. Appl. Prob., 16,36-44.

Itoh, Y. (1981). Representations for Wright model in population genetics, Research Memorandum No. 201, The Institute of Statistical Mathematics.

Itoh, Y.(1984). Random collision model of random genetic drift and stochastic difference equation, Ann. Inst. Statist. Math., 353-362.

Itoh, Y. (1987). Integrals of a Lotka-Volterra system of odd number of variables, Prog. Theor. Phys.,78,507-510.

Itoh, Y., (1993). Stochastic model of an integrable nonlinear system, J. Phys. Soc. Jpn, 62, 1826-1828.

伊藤栄明 (1993) 非線型可積分系の確率モデル, 統計数理研究所共同研究リポート 48, 99-117.

Itoh, Y., (1994). Combinatorial probability for a nonlinear integrable system (submitted for publication).

Karmarkar, N.(1990). Riemannian Geometry Underlying Interior- Point Methods for Linear Programming, Contemporary Mathematics, 114, 51-75.

丸山毅夫 (1981) 遺伝学における確率過程、日本物理学会誌, 36, 226-235.

Nakamura, Y.(1992). A new nonlinear dynamical system that leads to eigen values, Japan J. Indust. Appl. Math., 9, 133-139.

Nakamura, Y.(1994).Stochastic Lax representation and random collision models, J. Phys. Soc. Jpn, 63, 827-829.

永井敦、薩摩順吉 (1993). QR 分解法と Lotka-Volterra 方程式、統計数理研究所共同研究リポート 48, 119-123.

Okabe, Y., Mano, H., and Itoh, Y.(1993). Random collision model for interacting populations of two species and the fluctuation- dissipation theorem (submitted for publication)